



TITLE:

# 或種のブロック計画の不存在について (実験計画法研究会報告集)

AUTHOR(S):

小川, 潤次郎

---

CITATION:

小川, 潤次郎. 或種のブロック計画の不存在について (実験計画法研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1967, 25: 161-164

ISSUE DATE:

1967-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107499>

RIGHT:

或種のブロック計画の不存在について

日大 生産工 小川潤次郎

本稿の詳細については下記の論文を参照されたい。

小川潤次郎：ある種のブロックデザインの不存在について。(数学,  
第17巻, 第2号, 1965, 10, pp. 65-72)

J. Ogawa: "On the Non-Existence of Certain Block Designs", to be presented  
at the U.S.-JAPAN cooperative seminar on "Combinatorial Mathematics and its Applications" being scheduled to be held at the  
University of North Carolina at Chapel Hill, N. C. from April  
10 through 14 of 1967.

サイズ(ブロック内の実験単位の個数)が一様に  $k$  である  $b$  個のブロックがあつて、これに  $v$  個の処理が次の三条件を満たすような場合に割り付けられたとき、これを釣合型不完全ブロック計画 (Balanced Incomplete Block Design --- 略して BIBD) という。

- (1) 各ブロックは  $k$  個の相異なる処理を含む。
- (2) 各処理は  $r$  個のブロックに現われる。
- (3) 任意の二つの処理は丁度  $\lambda$  個のブロックに対して現われる。

この BIBD を規定する五つの係数  $v, b, r, k, \lambda$  は全部が独立ではない。  
次の二つの代数的な関係は見易い。

$$vr = bk, \quad \lambda(v-1) = r(k-1)$$

更に又いわゆる Fisher の不等式

$$v \leq b \quad r \geq k$$

が成り立つ。特に  $v = b$  従って  $r = k$  のとき BIBD は対称であるとい  
い、然らざるときは非対称という。

一般には  $v > k$  であって、特に  $v = k$  のときは完全ブロック計画と  
いわれ、すべての処理が各ブロック内に現われる場合である。ブロック  
サイズ  $k$  が  $v$  より小なる場合には、各ブロック内ですべての処理を実験で  
きない。従って「不完全」であるが、上記のような計画を用いれば、すべ  
ての処理比較が同一分散で線型推定できるとである。

1930 年代に R. A. Fisher と F. Yates は繰り返し数  $r$  が 10 以内の範囲の全  
部の BIBD をリストしようとしたが、そのうちにどうしても作れないもの  
があった。それは

$$(\alpha) \quad v=15, \quad b=21, \quad r=7, \quad k=5, \quad \lambda=2 \quad (\gamma) \quad v=36, \quad b=45, \quad r=10, \quad k=8, \quad \lambda=2$$

$$(\alpha^*) \quad v=22, \quad b=22, \quad r=7, \quad k=7, \quad \lambda=2 \quad (\gamma^*) \quad v=46, \quad b=46, \quad r=10, \quad k=10, \quad \lambda=2$$

$$(\beta) \quad v=21, \quad b=28, \quad r=8, \quad k=6, \quad \lambda=2 \quad (\delta) \quad v=46, \quad b=69, \quad r=9, \quad k=6, \quad \lambda=1$$

$$(\beta^*) \quad v=29, \quad b=29, \quad r=8, \quad k=8, \quad \lambda=2 \quad (\varepsilon) \quad v=51, \quad b=85, \quad r=10, \quad k=6, \quad \lambda=1$$

であった。色々な人が試みたがどうしても作れないのでこれらの不存在証  
明ということが問題になって来た訳である。更に BIBD を一般化した部分  
釣合型不完全ブロック計画 (Partially Balanced Incomplete Block Design — 略  
して PBIBD) というのがある。それは次のようなものである。

(1) 任意の二つの処理は、互に第 1 種のアソシエートであるが、第 2 種

のアソシエートであるか、-----、又は第 $m$ 種のアソシエートであるかのいずれかである。

- (2) 各処理はそれぞれ  $n_i$  個の第 $i$ 種のアソシエートをもつ。
- (3) 今二つの  $\alpha$  と  $\beta$  とが互いに第 $i$ 種のアソシエートであれば、 $\alpha$  とは第 $j$ 種アソシエートであり、同時に  $\beta$  とは第 $k$ 種アソシエートであるような処理  $\gamma$  の個数は  $p_{jk}^i$  であり、これはすべての第 $i$ 種アソシエートの対に対して共通である。

各処理はそれ自身とは第 $0$ 種アソシエートということにすれば

$$n_0 = 1, \quad p_{0i}^k = \delta_{ik}, \quad p_{ij}^0 = n_i \delta_{ij}.$$

但し、ここで  $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタである。

アソシエーションの係数の間には次の関係がある。

$$\sum_{i=0}^m n_i = v, \quad p_{ij}^k = p_{ji}^k, \quad \sum_{i=0}^m p_{jk}^i = n_k, \quad n_i p_{jk}^i = n_j p_{ik}^j = n_k p_{ij}^k$$

さて、 $m$  アソシエート・クラスのアソシエーションの定義された  $v$  個の処理が、そのサイズ  $k$  なる  $b$  個のブロックに次の三条件を満たすように割り分けられたとき、これを部分釣合型不完全ブロック計画という。

- (1) 各ブロックは  $k$  個の相異なる処理を含む。
- (2) 各処理は  $r$  個のブロックに現われる。
- (3) 第 $i$ 種アソシエートであるような処理対は丁度  $\lambda_i$  個のブロックに現われる。

もちろん、この場合も  $vr = bk$  及び  $r = \lambda_0$  とおくと

$$\sum_{i=0}^m n_i \lambda_i = rk$$

が成り立つ。

$v = 1$  であるような BIBD の双対計画は 2 アソシエート・クラスの PBIBD になることが判る。

PBIBD の場合にも BIBD の場合と同様な不存在証明の問題が起る。

本稿はこれらの問題に対して現在までの成果の総合的な報告である。